Esercizi su gradienti e potenziali

Esercizio 1. Si consideri il campo vettoriale

$$\overrightarrow{F}(x,y,z) = (x-z)\,\overrightarrow{i}_1 + (1-xy)\,\overrightarrow{i}_2 + z\,\overrightarrow{i}_3 \quad \forall\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$$

Dire se $\overrightarrow{F}$ è conservativo su $\mathbb{R}^3$.

Svolgimento. Osserviamo che $\overrightarrow{F} \in C^1(\mathbb{R}^3)$. Essendo $\mathbb{R}^3$ semplicemente connesso, $\overrightarrow{F}$ è conservativo se e solo se verifica l'uguaglianza delle derivate in croce, che calcoliamo:

$$\begin{cases} \frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y,z) = 0 \\ \frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y,z) = -y \\ \frac{\partial F_1}{\partial z}(x,y,z) = -1 \\ \frac{\partial F_3}{\partial x}(x,y,z) = 0 \\ \frac{\partial F_2}{\partial z}(x,y,z) = 0 \\ \frac{\partial F_3}{\partial y}(x,y,z) = 0 \end{cases}$$

Siccome non vale l'uguaglianza delle derivate in croce, concludiamo che $\overrightarrow{F}$ NON È CONSERVATIVO!

In effetti, provando a calcolare un potenziale φ per $\overrightarrow{F}$ con il metodo degli integrali indefiniti si trova

$$\int F_1(x,y,z)\,dx + \psi_1(y,z) = \int (x-z)\;dx + \psi_1(y,z) = \frac{1}{2}x^2 - xz + \psi_1(y,z)$$
$$\int F_2(x,y,z)\,dy + \psi_2(x,z) = \int (1-xy)\;dy + \psi_2(x,z) = y - \frac{1}{2}xy^2 + \psi_2(x,z)$$
$$\int F_3(x,y,z)\,dz + \psi_3(x,y) = \int z\,dz + \psi_3(x,y) = \frac{z^2}{2} + \psi_3(x,z)$$

Le tre espressioni sono INCOMPATIBILI: non c'è modo di scegliere ψ_1, ψ_2 e ψ_3 in modo che

$$\int F_1(x,y,z)\,dx + \psi_1(y,z) = \int F_2(x,y,z)\,dy + \psi_2(x,z) = \int F_3(x,y,z)\,dz + \psi_3(x,y)$$

Esercizio 2. Si consideri il campo vettoriale piano

$$\overrightarrow{G}(x,y) = 2x\,\overrightarrow{i}_1 + 4y\,\overrightarrow{i}_2 \quad \forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2$$

e sia (α,β) un punto appartenente alla curva $x^2+y^2=1$. Sia γ il segmento congiungente $(0,0)$ con (α,β). Determinare, al variare del punto (α,β), i valori

$$\max \int_\gamma \overrightarrow{G}, \quad \min \int_\gamma \overrightarrow{G}.$$

Svolgimento. Osserviamo che $\overrightarrow{G}$ è conservativo su $\mathbb{R}^2$. Infatti, $\mathbb{R}^2$ è semplicemente connesso e vale (**esercizio: verificarlo!**) l'uguaglianza delle derivate in croce. Si verifica (**esercizio!**) che gli infiniti potenziali di $\overrightarrow{G}$ sono dati da

$$\varphi(x,y) = x^2 + 2y^2 + k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Quindi

$$\int_\gamma \overrightarrow{G} = \varphi(\alpha,\beta) - \varphi(0,0) = \alpha^2 + 2\beta^2.$$

Allora calcolare

$$\max \int_\gamma \overrightarrow{G}, \quad \min \int_\gamma \overrightarrow{G}$$

al variare del punto (α,β) si riduce a risolvere un problema di massimizzazione e, rispettivamente, minimizzazione vincolata della funzione

$$\ell(\alpha,\beta) = \alpha^2 + 2\beta^2 \quad \text{sulla circonferenza} \quad \alpha^2+\beta^2 = 1.$$

Parametrizziamo, per esempio, tale vincolo rispetto alla variabile α, cosicché

$$\gamma = \{(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2 \ : \ \beta = 1-\alpha^2, \ \alpha \in [-1,1]\}.$$

Quindi, indicando con $\ell|_\gamma$ la restrizione di ℓ a γ, troviamo che

$$\int_\gamma \overrightarrow{G} = \ell|_\gamma(\alpha,\beta) = \alpha^2 + 2(1-\alpha^2) = 2-\alpha^2 \quad \text{con } \alpha \in [-1,1].$$

Calcolando i valori di massimo e di minimo della suddetta funzione, si trova immediatamente che

$$\begin{cases} \max \int_\gamma \overrightarrow{G} \ \text{ si ha per } \alpha = 0, \text{ quindi } \ \max \int_\gamma \overrightarrow{G} = 2, \\ \min \int_\gamma \overrightarrow{G} \ \text{ si ha per } \alpha = \pm 1, \text{ quindi } \ \min \int_\gamma \overrightarrow{G} = 1. \end{cases}$$

Esercizio 3. Sia $\alpha \neq 0$ e si consideri il campo vettoriale piano

$$\overrightarrow{F}(x,y) = \frac{y^2}{2\alpha x^2}\,\overrightarrow{i}_1 + \left(\sin(2y)\exp(\sin^2(y)) - \frac{2y}{x}\right)\overrightarrow{i}_2 \quad \forall\,(x,y) \in A = (0,+\infty)\times\mathbb{R}.$$

Determinare per quali valori di α il campo $\overrightarrow{F}$ è conservativo. Per tali valori, calcolare

$$\int_\Gamma \overrightarrow{F}\cdot d\Gamma, \quad \text{con } \Gamma \text{ il segmento congiungente } A=(2,\pi) \text{ a } B=(1,0).$$

Osserviamo che $A = (0,+\infty)\times\mathbb{R}$ è semplicemente connesso, quindi $\overrightarrow{F}$ è conservativo su A se e solo se vale l'uguaglianza delle derivate in croce. Si ha

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) = \dfrac{y}{\alpha x^2}, \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) = \dfrac{2y}{x^2}. \end{cases}$$

Quindi $\overrightarrow{F}$ è conservativo se e solo se $\alpha = \frac{1}{2}$.

Calcoliamo $\overrightarrow{F}$ con il metodo degli integrali indefiniti. Chiaramente, conviene calcolare

$$\int F_1(x,y)dx = \int \frac{y^2}{x^2}dx = -\frac{y^2}{x}$$

e quindi ricerchiamo un potenziale della forma

$$\varphi(x,y) = -\frac{y^2}{x} + \psi_1(y).$$

Imponiamo che questa funzione sia effettivamente un potenziale. Per costruzione, si ha chiaramente che $\frac{\partial \varphi}{\partial x} = F_1$. Si deve anche avere

$$\begin{aligned} F_2(x,y) = \left(\sin(2y)\exp(\sin^2(y)) - \frac{2y}{x}\right) &= \frac{\partial}{\partial y}\varphi(x,y) \\ &= \frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{y^2}{x} + \psi_1(y)\right) = -\frac{2y}{x} + \psi_1'(y) \end{aligned}$$

Quindi l'uguaglianza vale se e solo se

$$\psi_1'(y) = \sin(2y)\exp(\sin^2(y)),$$

da cui

$$\psi_1(y) = \int \sin(2y)\exp(\sin^2(y))dy = \int (2\sin(y)\cos(y)\exp(\sin^2(y)))dy = \exp(\sin^2(y)) + k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Quindi gli infiniti potenziali di $\overrightarrow{F}$ sono dati da

$$\varphi(x,y) = -\frac{y^2}{x} + \exp(\sin^2(y)) + k, \quad k \in \mathbb{R}.$$

Allora

$$\int_\Gamma \overrightarrow{F} = \varphi(1,0) - \varphi((2,\pi)) = 1 - \left(-\frac{\pi^2}{2} + e^0\right) = \frac{\pi^2}{2}.$$

Esercizio 4. Determinare almeno un valore di $\alpha \in \mathbb{R}$ per cui $\int_\Gamma \overrightarrow{F} = 0$, dove $\overrightarrow{F} : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2$ è

$$\overrightarrow{F}(x,y) = \frac{\alpha x}{x^2+y^2}\overrightarrow{i} + \frac{2y}{x^2+y^2}\overrightarrow{j} \quad \forall\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$$

e Γ è il bordo del quadrato di vertici $(1,0)$, $(2,0)$, $(2,1)$ e $(1,1)$ percorso in senso antiorario.

Svolgimento. Osserviamo che, se α è tale che $\overrightarrow{F}$ è conservativo, allora $\int_\Gamma \overrightarrow{F} = 0$ in quanto Γ è una curva chiusa.

Ci poniamo quindi il problema della conservatività di $\overrightarrow{F}$ sul suo dominio. Dato che $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ non è semplicemente connesso, il criterio delle derivate in croce è solanto NECESSARIO per la conservatività in $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$.

Osserviamo però che il sostegno di Γ è contenuto nel semipiano $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x > 0\}$, che è semplicemente connesso. Determiniamo allora per quali valori di α il campo $\overrightarrow{F}$ è conservativo nel semipiano, usando il criterio delle derivate in croce, che <u>nel semipiano è anche sufficiente</u>.

Calcoliamo le derivate in croce:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) = \dfrac{-\alpha x}{(x^2+y^2)^2}2y \\ \dfrac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) = \dfrac{-2y}{(x^2+y^2)^2}2x \end{cases}$$

da cui si trova che:

$$\frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) \;\Leftrightarrow\; \alpha = 2$$

Allora per $\alpha = 2$ il campo $\overrightarrow{F}$ è conservativo nel semipiano $\{x > 0\}$ e, quindi,

$$\int_\Gamma \overrightarrow{F} = 0.$$

Esercizio 5. Si consideri il campo vettoriale $\overrightarrow{F}$ definito da

$$\overrightarrow{F}(x,y) = \frac{y-2x^2}{\sqrt{y-x^2}}\,\overrightarrow{i}_1 + \left(\frac{1}{y} + \frac{x}{2\sqrt{y-x^2}}\right)\overrightarrow{i}_2 .$$

Calcolare l'integrale curvilineo $\int_\Gamma \overrightarrow{F}\cdot d\Gamma$, dove Γ è il segmento di estremi $A=(0,1)$ e $B=(2,5)$, percorso da A verso B. [**Suggerimento: disegnare** $\mathrm{dom}(\overrightarrow{F})$ **e** Γ**.**]

Svolgimento. Il dominio di $\overrightarrow{F}$ è l'insieme

$$\mathcal{D} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 :\ y > x^2\}$$

che è aperto e semplicemente connesso. Si noti che il segmento $[A,B]$ è contenuto in $\mathcal{D}$.

Verifichiamo se $\overrightarrow{F}$ è conservativo con il criterio delle derivate in croce. Infatti, $\forall\,(x,y)\in\mathcal{D}$ si trova:

$$\frac{\partial F_2}{\partial x}(x,y) = \frac{1}{2}\,\frac{\sqrt{y-x^2}+\frac{x^2}{\sqrt{y-x^2}}}{y-x^2} = \frac{y}{2(y-x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\frac{\partial F_1}{\partial y}(x,y) = \frac{\sqrt{y-x^2}-(y-2x^2)\frac{1}{2\sqrt{y-x^2}}}{y-x^2} = \frac{y}{2(y-x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$$\Rightarrow\ \overrightarrow{F} \text{ è conservativo in } \mathcal{D}$$

Poiché il calcolo di $\int_\Gamma \overrightarrow{F}\cdot d\Gamma$ sembra essere complicato, posso sostituire a Γ qualsiasi altra curva (reg. a tratti) che porti da A a B.

Per esempio, potrei prendere $\widetilde{\Gamma} = [A,C]\cup[C,B]\subset\mathcal{D}$ (cioè l'unione dei segmenti da A a C e da C a B), dove $C=(0,5)$. Tuttavia, l'integrale lungo $[C,B]$ è di nuovo complicato:

$$[C,B]:\ \overrightarrow{r}(t) = t\,\overrightarrow{i}_1 + 5\,\overrightarrow{i}_2,\quad 0\le t\le 2$$

$$\overrightarrow{r}'(t) = \overrightarrow{i}_1$$

$$\overrightarrow{F}(\overrightarrow{r}(t)) = \frac{5-2t^2}{\sqrt{5-t^2}}\,\overrightarrow{i}_1 + \left(\frac{1}{5}+\frac{t}{2\sqrt{5-t^2}}\right)\overrightarrow{i}_2$$

$$\int_{[C,B]} \overrightarrow{F}\cdot d\overrightarrow{r} = \int_0^2 \frac{5-2t^2}{\sqrt{5-t^2}}\,dt$$

Idea: l'espressione analitica delle componenti F_1, F_2 del campo $\overrightarrow{F}$ suggerisce di integrare lungo il cammino

$$\overline{\Gamma}:\quad y = x^2+1\,,\quad 0\le x\le 2$$

(lo si disegni!) Nellla restrizione di $\overrightarrow{F}$ ai punti di $\overline{\Gamma}$, il termine $\sqrt{y-x^2}$ nel denominatore delle espressioni di F_1 ed F_2 scompare e si ottengono delle espressioni razionali. Infatti, la forma parametrica di $\overline{\Gamma}$ è

$$\overrightarrow{r}(t) = t\,\overrightarrow{i}_1 + (t^2+1)\,\overrightarrow{i}_2,\quad 0\le t\le 2$$

Si trova:

$$\overrightarrow{r}'(t) = \overrightarrow{i}_1 + 2t\,\overrightarrow{i}_2$$

$$\overrightarrow{F}(\overrightarrow{r}(t)) = (1-t^2)\,\overrightarrow{i}_1 + \left(\frac{1}{t^2+1}+\frac{t}{2}\right)\overrightarrow{i}_2$$

da cui

$$\int_{\overline{\Gamma}} \overrightarrow{F}\cdot\overline{\Gamma} = \int_0^2 \left(1-t^2+\frac{2t}{t^2+1}+t^2\right)dt$$
$$= \left[t+\log(t^2+1)\right]_0^2 = 2+\log(5)$$